Or $f(x) - x < 0$ pour tout réel $x \in]-1, 0[$ et comme $U_n \in]-1, 0[$ donc $f(U_n) - U_n < 0$ et par suite $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante .

Conclusion : (U_n) est une suite décroissante minorée par -1 donc (U_n) est convergente .

$U_{n+1} = f(U_n)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} U_n = l$

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en l donc $f(l) = l$

$$\Rightarrow \frac{l+1}{\sqrt{l^2+1}} = l+1 \Rightarrow (l+1)[1 - \sqrt{l^2+1}\,] = 0 \Rightarrow l = -1$$

d'où $l = 0$

Or on a : $U_0 = -\frac{1}{2}$ et (U_n) est une suite décroissante donc

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow l \leq -\frac{1}{2}$ d'où $l = -1$.

5°/

a) $U_{n+1} + 1 = \dfrac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$

Or on a : $-1 \leq U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq U_n^2 + 1 < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{U_n^2+1} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \sqrt{\frac{4}{5}} \text{ et comme } -1 < U_n < 0$$

$$\Rightarrow U_n + 1 > 0 \text{ d'où } 0 < \frac{U_n+1}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 \leq \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1)$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

- Pour n = 0 on a : $U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < U_0 + 1 \leq \frac{1}{2}$